

# 二维经验模态可分离度及其量化计算

葛光涛<sup>1,2</sup>, 虞 露<sup>1</sup>

(1. 浙江大学信息与电子工程学系, 浙江杭州 310027; 2. 浙江工商大学信息与电子工程学院, 浙江杭州 310018)

**摘 要:** 解释和分析了二维信号可分离度的概念. 基于二维模态分解理论和二维信号解析相位理论提出了二维模态信号的加性可分离度计算式和乘性可分离度计算式, 并分别利用完全加性信号和完全乘性信号对两种计算式的实际效果进行了验证. 二维经验模态可分离度的应用意义体现在: 它可以鉴定二维模态分解算法分解质量的优劣, 可以用来确定模态分解客观分解终止条件, 还可以在单方向特征信息提取时为预处理方法的选择提供有效依据.

**关键词:** 二维信号可分离度; 二维经验模态分解; 解析相位; 加性可分离度; 乘性可分离度

**中图分类号:** TN911      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013)07-1313-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.07.011

## The Bidimensional Empirical Mode Detachable Degree and Its Quantum Calculation

GE Guang-tao<sup>1,2</sup>, YU Lu<sup>1</sup>

(1. Department of Information Science and Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China;

2. School of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China)

**Abstract:** The concept of bidimensional signal detachable degree is explained and analyzed. Based on the Bidimensional Empirical Mode Decomposition (BEMD) theory and the bidimensional signal analytic phase theory, this paper brought out add and product detachable degree calculation formulas for bidimensional empirical mode signal. To verify these two formulas' actual effects, we performed experiments with complete add detachable signal and complete product detachable signal. The application of bidimensional empirical mode detachable degree shows that it can identify the BEMD algorithm's quality and has capability to determine the objective BEMD stopping criterion. It also provides an effective basis for the choice of preprocessing methods when extracting single orientation features.

**Key words:** bidimensional signal detachable degree; bidimensional empirical mode decomposition; analytic phase; add detachable degree; product detachable degree

### 1 引言

二维图像可被视作空间域二维信号. 二维信号可以由一维信号通过某种运算构建出来, 或者说, 任何二维信号都具有分离为一维信号的可能性, 我们将这种可能性定义为二维信号的可分离度. 本文中对二维信号可分离度的解释是: 某个二维信号可以被若干个方向不同的一维信号通过某种运算表达出来的可能性. 当这种可能性大到一定程度时, 该二维信号就可以近似地被这几个方向不同的一维信号通过这种运算表达出来. 二维信号可分离度的研究对于多维信号处理和多维信息向一维的映射都具有重要的理论意义.

经验模态分解 (Empirical Mode Decomposition, EMD) 方法是美国学者 Norden E Huang 等人在 1998 年提出的一种新的信号处理方法, 该方法在非平稳信号的分析 and 处理中体现出了良好的性能<sup>[1]</sup>. 鉴于 EMD 方法在一维信号处理方面的优良效果, 国内外学者将它推广到二维, 提出了二维经验模态分解 (Bidimensional Empirical Mode Decomposition, BEMD) 方法并应用于二维信号处理<sup>[2~5]</sup>. 与一维模态分解一样, 对二维信号进行经验模态分解后也可以获得具有明确时频分析意义的固有模态函数 (Intrinsic Mode Function, IMF), 二维固有模态函数即为具有解析意义的二维模态信号, 在此基础上就可以对原始信号进行精确的时频分析.

本文中讨论的二维信号可分离度是一个相对狭义的概念,专指二维模态信号(即二维固有模态函数)可以被水平和垂直两个方向上的一维信号通过某种初等运算表达出来的可能性,而这样的初等运算主要是指相加和相乘.以二维经验模态分解为基础讨论二维信号可分离度的原因是经过二维经验模态分解后得到的二维模态信号实质上是一种具有明确时频分析意义的二维单分量信号,二维单分量信号是在本地区域无叠加的局域点单频二维信号,这样的二维信号才有可能被瞬时相位和瞬时频率都有物理意义的一维信号经过初等运算所构建.实际上,二维信号解析相位是否具有明确的物理意义同样取决于其本身是否为二维单分量信号<sup>[6~9]</sup>,本文中二维信号可分离度的量化计算式正是在二维信号解析相位定义式的基础上提出来的.

## 2 二维信号的解析相位及其定义式

### 2.1 二维解析信号的构建

空间域二维信号(本文中为二维图像)解析相位的概念是对一维信号瞬时相位概念的一种延伸.一维信号的瞬时相位是一维解析信号虚部和实部所形成复共轭对的反正切值<sup>[6]</sup>,在空间二维域,本文将与一维信号的瞬时相位对应的概念称为空间域二维信号的解析相位.对于任意可进行傅里叶变换的空间域二维信号(图像) $f(x, y)$ ,也可以求它的希尔伯特变换 $f_H(x, y)$ ,得到二维解析信号

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) + if_H(x, y) \quad (1)$$

根据此空间域二维解析信号的具体表达式就可以求出其幅度包络和解析相位.因此,二维信号解析相位的求取首先依赖于二维解析信号的构建.

目前存在的几种传统二维解析信号的构建方法包括总体解析信号、部分解析信号以及具有单象限傅立叶谱的解析信号等<sup>[7]</sup>.任意方向部分解析信号的定义只与一维方向相关,不符合二维的特点;总体解析信号、具有单象限傅立叶谱的解析信号的定义也不能满足解析信号构建的基本原则<sup>[8]</sup>.四元数解析信号的出现很好地弥补了总体解析信号和部分解析信号的不足<sup>[9]</sup>,是一维解析信号到二维解析信号的一种更合理的延伸.

四元数(Quaternion)代数是 Hamilton 于 1843 年提出的向量代数,近年来被应用于高维信号处理<sup>[10,11]</sup>.对四元数谱分析和信号时频表达的研究则开始于 1998 年, Bulow Thomas 等人证明了二维实函数的四元数傅里叶变换(QFT)满足四元数 Hermit 对称的定义<sup>[9,12,13]</sup>,因此二维实函数的所有 QFT 信息可以由一个象限的 QFT 信息完全得出<sup>[8,9]</sup>.近年来,国内的科研工作者们也利用四元数对高维信号处理问题进行了研究,其中包括

基于四元数奇异值分解估计频率参量和评价视频质量的研究,以及基于四元数的局部傅里叶变换的研究等等<sup>[14~16]</sup>.四元数解析信号的一种经典表示式为:

$$\hat{f}_q(x, y) = f(x, y) + if_H^x(x, y) + jf_H^y(x, y) + kf_H^z(x, y) \quad (2)$$

其中, $f_H^x(x, y)$ , $f_H^y(x, y)$ 分别表示  $x, y$  坐标轴方向的部分希尔伯特变换, $f_H(x, y)$ 为 $f(x, y)$ 的总体希尔伯特变换. $\hat{f}_q(x, y)$ 实质上已经综合了 $f(x, y)$ , $f_H^x(x, y)$ , $f_H^y(x, y)$ 和 $f_H(x, y)$ 的信息.

### 2.2 二维信号解析相位的定义式

本文在二维信号表达为四元数解析信号的基础上来讨论二维信号解析相位的求法.目前基于四元数解析信号的二维信号解析相位的定义方式有两种<sup>[9,17]</sup>,分别是由 Bulow Thomas 和崔峰提出的.

根据三维空间转动与单位四元数的对应关系,第一种定义方式将四元数以下面的形式表达<sup>[9]</sup>:

$$q = |q| e^{i\varphi} e^{kj\psi} e^{j\theta}, \quad (\varphi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2) \times [-\pi/4, \pi/4] \quad (3)$$

其中指数函数的 EULER 方程成立, $|q|$ 为四元数  $q$  的模, $(\varphi, \theta, \psi)$ 为四元数的相位矢量.

对于四元数  $q \in H$ ,相位角  $\psi$  的定义式如下:

(1)单位化四元数: $q' = q/|q| = a + ib + jc + kd$

(2)则  $\psi$  分量值:

$$\psi = -\arcsin(2(bc - ad))/2 \quad (4)$$

第二种定义方式将四元数解析信号 $\hat{f}_q(x, y)$ 表示为以下形式<sup>[17]</sup>:

$$\hat{f}_q(x, y) = \lambda_1(x, y) \exp[i\varphi(x, y)] + \lambda_2(x, y) \exp[j\theta(x, y)] + \lambda_3(x, y) \exp[k\psi(x, y)] \quad (5)$$

对应式(2),采用下面方法配平等式(5),进而求出相位角  $\psi$ :

(1)单位化四元数: $q' = q/|q| = a + ib + jc + kd$ ;

(2)对  $b$  求取  $x$  方向的部分 Hilbert 变换  $b_H^x$ ;

(3)对  $c$  求取  $y$  方向的部分 Hilbert 变换  $c_H^y$ ;

(4)取  $\lambda_3(x, y) \exp[k\psi(x, y)]/|q| = a + b_H^x + c_H^y + kd$ ,则

$$\psi(x, y) = \text{atan2}(d, a + b_H^x + c_H^y) \quad (6)$$

以上两种二维信号解析相位的定义式实际上是两种不同的数据融合的方式,分别对四元数解析信号各项所携带的信息进行了数据融合.

## 3 各个模态的可分离度及其量化计算

任何实平稳的随机信号都可以用解析信号的方式来描述,然而并不是所有随机过程的解析相位都具有

明确的物理意义.对于空间域二维实信号(本文中为二维图像)而言,其解析相位是否具有明确的物理意义取决于其本身是否为具有明确时频分析意义的单分量信号.多分量 AM-FM 建模技术将图像表示为局部一致的复值单分量之和<sup>[10,18]</sup>,而二维经验模态分解中模态的定义正是针对图像单分量信号的要求提出来的,因此本文将图像的各个模态作为讨论具有明确物理意义的二维信号解析相位的基础,并在此基础上对图像各个模态的可分离度进行量化计算.

### 3.1 各个模态的加性可分离度及其量化计算

通过对二维经验模态分解产生的各个模态的相位分析,可以验证解析相位定义式(6)中的相位  $\psi$  组份值具有表达信号累加可分离程度的功能<sup>[8]</sup>.当二维信号是完全加性可分离的信号时,  $\psi = 0$ .由二维信号解析相位的定义式(6)可知,  $\psi = 0$  的原因是完全加性可分离信号的总体希尔伯特变换(在定义式中作为分子项)为 0.而接近于加性信号的二维信号的总体希尔伯特变换则很小,因此,可以量化地提出表示某个二维模态信号的加性可分离度的计算式.

设空间域二维模态信号(图像) $f(x, y)$ 的四元数解析信号为  $\hat{f}_q(x, y)$ ,

(1)单位化四元数解析信号:

$$\begin{aligned} \hat{f}_q(x, y)' &= \hat{f}_q(x, y) / |\hat{f}_q(x, y)| \\ &= a(x, y) + ib(x, y) + jc(x, y) + kd(x, y) \end{aligned}$$

(2)计算单位化后的总体希尔伯特变换  $d(x, y)$  的能量,

$$E = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} |d(x, y)|^2 dx dy \quad (7)$$

(3)空间域二维模态信号(图像) $f(x, y)$ 的加性可分离度(add detachable degree, ADD)定义为下式,

$$ADD = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{E} \times 10^{-\alpha}\right) \quad (8)$$

式(8)中的  $\alpha$  为归一化控制系数,目的是将可分离度的值映射到 0 到 1 之间,一般取 3.原始信号的加性可分离度也可以参照式(8)计算,以便与模态的加性可分离度进行对比.

现举一例,对于二维完全加性信号图像(大小为  $101 \times 101$ )  
维完全加性信号,其表达式如式(9)~(11),图像见图 1.

$$f(x, y) = f_{\text{high}}(x, y) + f_{\text{low}}(x, y) \quad (9)$$

$$f_{\text{high}}(x, y) = 50\cos(200x) + 50\cos(200y) \quad (10)$$

$$f_{\text{low}}(x, y) = 200\cos(10x) + 200\cos(10y) \quad (11)$$

经计算,  $f(x, y)$  原始的高频分量  $f_{\text{high}}(x, y)$  与它对应的第一模态的总体希尔伯特变换结果对比如图 2 所示;  $f(x, y)$  原始的低频分量  $f_{\text{low}}(x, y)$  与它对应的第二模态的总体希尔伯特变换结果对比如图 3 所示.

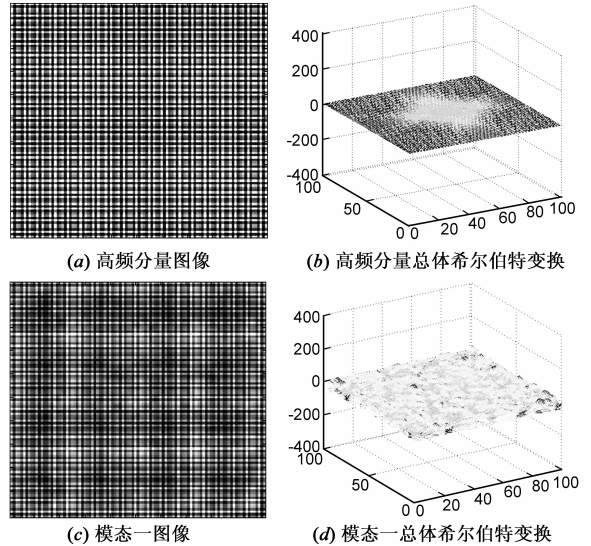


图2 高频分量与第一模态的总体希尔伯特变换结果对比

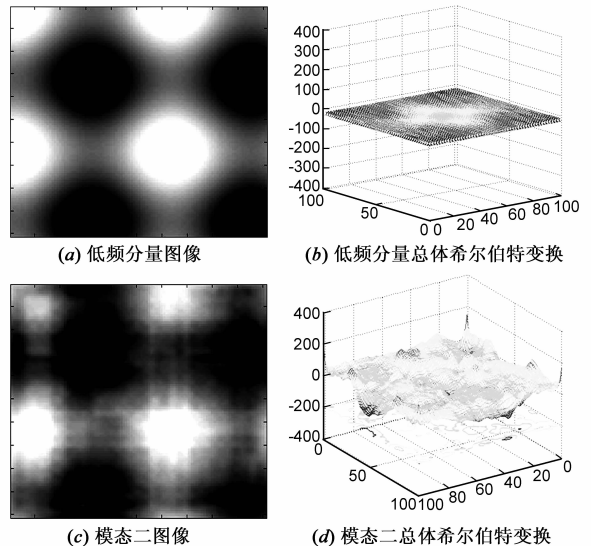


图3 低频分量与第二模态的总体希尔伯特变换结果对比

理论上,  $f_{\text{low}}(x, y)$  这种完全累加性可分离信号的总体 Hilbert 变换结果应该为零,但是由于总体 Hilbert 变换结果在仿真中是利用傅立叶反变换得到的,因此这个值并不绝对为 0,而只是远远小于它在傅立叶反变换结果中对应的实部(即原图像).即使如此,图 2 和图 3 还是显示了  $f_{\text{high}}(x, y)$  与第一模态之间以及  $f_{\text{low}}(x, y)$  与第二模态之间在总体希尔伯特变换结果上的差异.这样的差异也必然会导致加性可分离度的差异,如表 1 所示.

表 1 完全加性信号原始分量和模态的加性可分离度比较

加性可分离度	高频/模态一	低频/模态二
原始分量	0.9944	0.9119
模态	0.8859	0.6338

通过计算第一模态图像和第二模态图像的加性可分离度可以知道模态一和模态二是否接近完全加性可分离信号.从加性可分离度的角度可以再次验证二维经验模态对二维信号的分解能力.

### 3.2 各个模态的乘性可分离度及其量化计算

Bulow Thomas 等人利用离散四元数 GABOR 滤波器与不同形式乘积型数字图像的卷积,得到了利于四元数解析信号分析的简单分量,进而求取了相位  $\psi$  组份值与二维乘积型信号局部内蕴结构的对应关系<sup>[9]</sup>.这种对应关系一定程度上具有表达信号乘积性可分离程度的功能.当二维信号是完全乘积性可分离的信号时,  $\psi = 0$ .

设空间域二维模态信号(图像) $f(x, y)$ 的四元数解析信号为  $\hat{f}_q(x, y)$ ,

(1)单位化四元数解析信号:

$$\begin{aligned} \hat{f}_q(x, y)' &= \hat{f}_q(x, y) / |\hat{f}_q(x, y)| \\ &= a(x, y) + ib(x, y) + jc(x, y) + kd(x, y) \end{aligned}$$

(2)设项  $P(x, y) = |b \cdot c - a \cdot d|$ ,计算  $P(x, y)$ 项的能量,

$$E = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} |P(x, y)|^2 dx dy \quad (12)$$

(3)空间域二维模态信号(图像) $f(x, y)$ 的乘性可分离度(Product Detachable Degree, PDD)定义为下式,

$$PDD = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{E} \times 10^{-\beta}\right) \quad (13)$$

式(13)中的  $\beta$  为归一化控制系数,一般取 4.原始信号的乘性可分离度也可以参照式(13)计算,以便与模态的乘性可分离度进行对比.

对于二维完全乘性信号  $f(x, y)$ ,其表达式如式(14)~(16),图像见图 4.

$$f(x, y) = f_{\text{high}}(x, y) + f_{\text{low}}(x, y) \quad (14)$$

$$f_{\text{high}}(x, y) = 50\cos(100x)\cos(100y) \quad (15)$$

$$f_{\text{low}}(x, y) = 200\cos(10x)\cos(10y) \quad (16)$$

如图 4,  $f(x, y)$  图像(大小为  $101 \times 101$ )

$f(x, y)$  原始的高频分量  $f_{\text{high}}(x, y)$  与同它对应的第一模态的  $P(x, y)$  项的结果对比如图 5 所示;  $f(x, y)$  原始的低频分量  $f_{\text{low}}(x, y)$  与同它对应的第二模态的  $P(x, y)$  项的结果对比如图 6 所示.

$P(x, y)$  项是单位化后四元数解析信号四项间的一个差分值,对某乘积型单分量或其对应的模态来说,

一项总体希尔伯特变换和两项部分希尔伯特变换之间的差异在乘积相减后大部分被抵消了,因此,这些情况下  $P(x, y)$  项的计算结果都很接近于 0, 但任何乘积型单分量与其对应的模态间乘性可分离度的差异仍然是存在的,并可以量化计算出来,如表 2 所示.

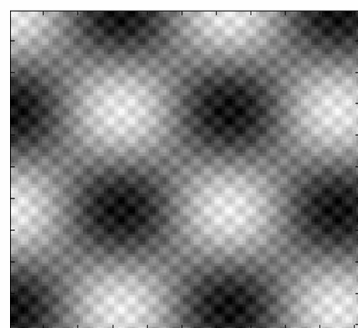


图 4 二维完全乘性信号图像(大小为  $101 \times 101$ )

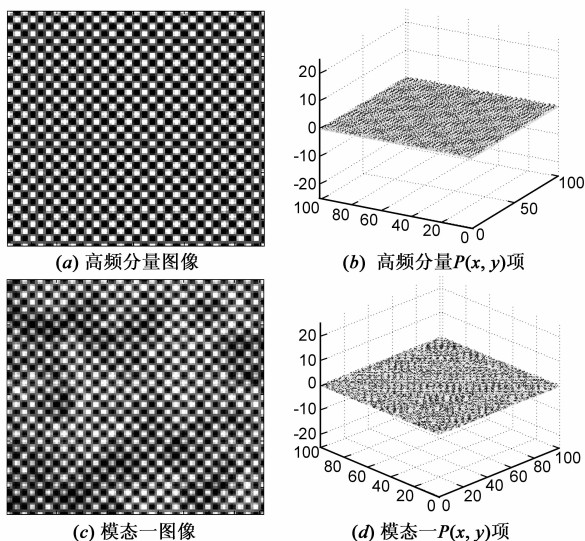


图 5 高频分量与对应的第一模态的  $P(x, y)$  项的计算结果对比

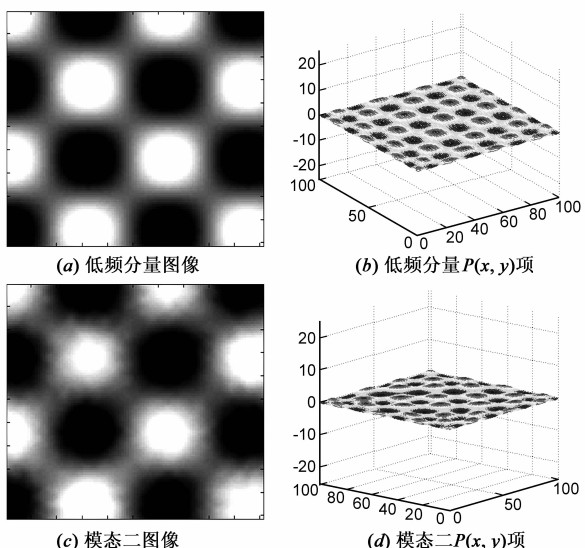


图 6 低频分量与对应的第二模态的  $P(x, y)$  项的计算结果对比

表 2 完全乘性信号原始分量和模态的乘性可分离度比较

乘性可分离度	高频/模态一	低频/模态二
原始分量	0.9595	0.9582
模态	0.9551	0.9555

#### 4 模态可分离度的应用意义

模态可分离度的应用主要包括以下几方面:可以用来鉴定二维模态分解算法分解质量的优劣;可以用来区分模态信号和余量信号,确定客观的分解终止条件;对某图像进行单方向特征信息提取时,可分离度的计算是选择最佳的预处理方法的有效依据。

首先,模态可分离度可以用来鉴定二维模态分解算法分解质量的优劣。对分解质量的鉴定具体可以采用如下方法:对于一种新的二维模态分解算法我们可以用其来分解类似于图 1 中的二维完全加性信号,再对得到的各个模态计算加性可分离度,各模态加性可分离度的计算结果越接近于 1,说明该二维模态分解算法的分解质量越高。同样道理,也可以利用模态乘性可分离度来鉴定二维模态分解算法分解质量的优劣。

其次,模态加性可分离度可以用来区分模态信号和余量信号,确定客观的分解终止条件。在 EMD 算法的执行过程中需要两个终止条件:一个是筛选每一分量时的终止条件,称为分量终止条件;另一个是整个分解过程的终止条件,称为分解终止条件。理论上讲,什么时候停止整个 EMD 解过程,应该取决于被分解的多分量信号中所包含单分量成分的多少;而在实际应用中,由于被分解的数据往往十分复杂,迄今为止没有合适的方法确定某二维信号中究竟包含多少单分量成分,大多数情况下,分解终止条件都是研究者主观设定的。

为了研究这一问题,我们可以计算一下 LENA 图像和 Underwater Valley 图像的各个模态及余量的加性可分离度,得到如表 3 所示的结果。

表 3 LENA 图像和 Underwater Valley 图像的加性可分离度

	原图像	模态一	模态二	模态三	余量
LENA	0.0222	0.0361	0.0398	0.0444	0.0197
Underwater Valley	0.1101	0.1727	0.1876	0.2019	0.0876

通过计算发现图像模态的加性可分离度要高于原来图像,而且高阶模态的加性可分离度要高于低阶模态。高阶模态包含的图像频率低,频带窄,图像内容简单,这样的图像被分解为不同信号加和的可能性就更大,这一点与人类视觉的直观感知是相符合的。余量的加性可分离度要远低于各个模态,甚至低于原始图像,是因为余量是不包含图像内容的,它含有的信息只是

图像明暗大趋势。这也证明了余量信号在本质上与模态信号的区别,余量就是余量,而不应该被称为最后一个模态。由此,模态可分离度可以成功地地区分高阶模态信号和余量信号。

基于以上结果,可以采用以下办法客观地确定分解终止条件:在分解过程中一旦发现分解得到的高阶模态的加性可分离度出现降低趋势,则可判断原始信号中的单分量成分已经筛分完毕,停止整个筛分过程,即可确定整个分解过程的终止条件。

第三,进行单方向特征信息提取时,可分离度的计算是选择最佳的预处理方法的有效依据。例如,第一模态的高可分离度决定了它往往比原始图像更有利于进行单方向的特征信息提取,由此便可以进一步确定后面的一系列图像的预处理方法。第一模态加性和乘性可分离度都高于原始图像;并且第一模态傅立叶相位继承率一般在原始图像 90% 以上<sup>[19]</sup>,这意味着第一模态几乎继承了原始图像的所有特征。以上两点因素决定了用第一模态代替原始图像作为信号处理对象时,在某些方面往往会具有特殊的优势。

#### 5 结论

目前,二维信号的可分离度尚不存在统一和明确的定义。本文是借助二维模态解析相位的概念衍生和推导出来一种狭义解释下的二维单分量信号可分离度计算式,并利用完全加性信号和完全乘性信号验证了该计算式的实际效果。二维模态可分离度的研究价值一方面体现在其对二维模态分解理论发展的重要意义,另一方面体现在其对单方向特征信息提取的预处理具有有效的指导作用。

对于二维信号被任意两个方向的一维信号表达的可能性的计算,可以在本文计算式的基础上做相应的调整,如采用分别给水平和垂直两个自变量乘相应的旋转因子等办法。总之,关于二维信号可分离度的更为广义的计算表达方法尚有待进一步研究。

#### 参考文献

- [1] Huang N E, Zheng S, Steven R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear non-stationary time series analysis [A]. Proceedings of Mathematical, Physical and Engineering Sciences [C]. London: The Royal Society Press, 1998. 903 - 995.
- [2] Rilling G, Flandrin P, Goncalves P. Empirical mode decomposition as a filter bank [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(2): 112 - 114.
- [3] Xu Y, Liu B, Riemenschneider S. Two-dimensional empirical mode decomposition by finite elements [J]. Proceeding of Roy-

- al Society A, 2006, 462: 3081 – 3096.
- [4] 徐晓刚, 徐冠雷, 王孝通, 秦绪佳. 经验模式分解(EMD)及其应用[J]. 电子学报, 2009, 37(3): 581 – 585.  
Xu Xiao-gang, Xu Guan-lei, Wang Xiao-tong, Qin Xu-jia. Empirical mode decomposition and its application[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(3): 581 – 585. (in Chinese)
- [5] Christophe Damerval. A fast algorithm for bidimensional EMD [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(10): 701 – 704.
- [6] 朱华, 黄辉宁, 李永庆, 梅文博. 随机信号分析[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1990.
- [7] Bulow T, Sommer G. Hypercomplex signals—a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(11): 2844 – 2855.
- [8] 崔峰. EMD 算法与图像时频分析[D]. 北京: 中国科学院自动化研究所, 2005. 5.  
Cui Feng. EMD algorithm and image time-frequency analysis [D]. Beijing: Institute of Automation, Chinese Academy of Science, 2005. 5. (in Chinese)
- [9] Bulow T. Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images[D]. Kiel, Germany: Christian Albrechts University, 1999.
- [10] 沈滨, 崔峰, 彭思龙. 二维 EMD 的纹理分析和图像瞬时频率估计[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(10): 2345 – 2352.  
Shen Bin, Cui Feng, Peng Si-long. Bidimensional EMD for texture analysis and estimation of the instantaneous frequencies of an image [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(10): 2345 – 2352. (in Chinese)
- [11] Chen Ming-Yang, et al. Algebraic identification for optimal nonorthogonality splines complex pace-time block codes using tensor product on quaternions [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 32 – 33.
- [12] Bulow T, Sommer G. Quaternionic Gabor filters for local structure classification [A]. Proceedings of 14th International Conference on Pattern Recognition [C]. Brisbane: IEEE, 1998. 808 – 810.
- [13] Bulow T, Sommer, G. A novel approach to the 2nd analytic signal [A]. Proceedings of International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns [C]. Ljubljana: Springer Berlin Heidelberg, 1999. 25 – 32.
- [14] 汪飞, 王树勋, 陈巧霞. 基于 Hamilton 四元数矩阵奇异值分解的二维谐波频率参量估计[J]. 电子学报, 2007, 35(12): 2441 – 2445.  
Wang Fei, Wang Shu-xun, Chen Qiao-xia. Parameters Estimation of Two-Dimensional Harmonics Based on Singular Value Decomposition of Quaternion Matrix [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(12): 2441 – 2445. (in Chinese)
- [15] 张富强, 李均利, 等. 基于四元数奇异值分解的视频质量评价方法[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 219 – 223.  
Zhang Fu-qiang, Li Jun-li, et al. Video quality assessment based on quaternion singular value decomposition [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 219 – 223. (in Chinese)
- [16] 何鹏, 薛之昕, 江顺亮. 基于四元数的局部傅里叶变换 [J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(1): 53 – 58.  
He Peng, Xue Zhi-xing, Jiang Shun-liang. Local quaternion Fourier transform [J]. Computer Technology and Development, 2012, 22(1): 53 – 58. (in Chinese)
- [17] 崔峰, 曹学光, 彭思龙. 新的四元数解析信号相位定义 [J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(2): 251 – 258.  
Cui Feng, Cao Xue-guang, Peng Si-long. A new phase definition of quaternionic analytic signal [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(2): 251 – 258. (in Chinese)
- [18] Havlicek J P, Harding D S, Bovik A C. The multicomponent AM-FM image representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(6): 1094 – 1100.
- [19] Guangtao Ge. The IMF image analysis in bidimensional EMD [A]. International Congress on Image and Signal Processing [C]. Shanghai: IEEE Computer Society, 2011. 317 – 321.

#### 作者简介



葛光涛 男, 1977 年 3 月出生, 吉林德惠人. 2009 年获哈尔滨工程大学信号与信息处理专业博士学位, 其后在浙江大学信电系从事博士后研究工作, 并在浙江工商大学信息与电子工程学院任教. 研究方向为计算机视觉、多媒体通信、多维信号稀疏表达及优化计算.  
E-mail: ggtggt@zju.edu.cn



虞露 女, 1969 年 5 月出生, 浙江杭州人, 教授、博士生导师. 1996 年毕业于浙江大学, 获电子与通信系统博士学位. 现任浙江大学信息与通信工程研究所副所长, 国家数字音视频编解码技术标准工作组(AVS)视频组组长, 全国信息技术标准化技术委员会多媒体分委会委员, IEEE 视频信号处理和通信技术委员会(VSPC)委员. 研究领域: 视频编码和多媒体通信理论、方法及标准化; 专用集成电路及片上系统设计与优化方法学.  
E-mail: yul@zju.edu.cn